

RIDICAREA LA PUTERE CU EXPONENT NATURAL A UNUI NUMĂR NATURAL

Înmulțirea repetată a unui număr determină operația de ridicare la putere.

Exemple :

- $2 \cdot 2 \cdot 2$ se notează 2^3 și se citește „2 la puterea a 3 –a , sau 2 la a 3-a”
- $3 \cdot 3 = 3^2$

Definiție : $a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a = a^n$ (a la puterea n sau „ a la n ”)
 de n ori

a = baza puterii

n = exponentul puterii

Prin convenție $a^1 = a$; $a^0 = 1$ ($a \neq 0$) .
 0^0 nu se poate efectua.

Exemple :

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25$$

$$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$$

$$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$8^2 =$$

$$6^3 =$$

Observații : $1^n = 1$ pentru orice număr natural n

$0^n = 0$ pentru orice număr natural nenul n

Atenție : *A nu se confunda puterile cu înmulțirea, adică a^n nu înseamnă $a \cdot n$*

Reguli de calcul cu puteri

Pentru orice numere naturale a, b, m, n cu $a, b \neq 0$ au loc relațiile

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

2. $a^m : a^n = a^{m-n}$

3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

4. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

5. $(a : b)^n = a^n : b^n$

Exerciții :

1. Calculați utilizând regulile de calcul cu puteri :

a) $2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$

b) $23^{13} \cdot 23^5 =$

c) $3^{30} \cdot 3^{15} \cdot 3 =$

d) $2^{14} : 2^5 =$

e) $(5^3)^7 =$

Observație : Operația de ridicare la putere este o operație de ordinul III, deci se face înaintea înmulțirilor, împărțirilor, adunărilor , scăderilor .

Pentru ușurarea calculelor cu puteri, numerele care nu sunt scrise ca puteri se pot scrie la puterea 1 :

$$a = a^1$$

Ex: $3^{30} \cdot 3^{15} \cdot 3 = 3^{30} \cdot 3^{15} \cdot 3^1 = 3^{30+15+1}$

Atenție : A nu se confunda a^{m^n} cu $(a^m)^n$.

Pentru a calcula a^{m^n} , trebuie să calculăm mai întâi puterea $m^n = p$, iar apoi să calculăm a^p

Exemplu : a) $5^{2^5} : 5^{5^2} = 5^{32} : 5^{25} = 5^{32-25}$

Aplicații :

1. Rezultatul calculului $(2^0 + 2^1 + 2^2) : (2^3 - 1)$ este

2. Calculați produsul : $P = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{100}$

Indicație : $P = 2^1 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot 2^{100} = 2^{1+2+\dots+100} = 2^{5050}$ (suma este o sumă Gauss)

3. Scrieți sub forma unor puteri :

a) $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3$

b) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

c) $4 = 2 \cdot 2 =$

d) $9 = 3 \cdot 3 =$

e) $16 =$

f) $27 =$

g) $25 =$

4. Calculați jumătatea numărului :

a) 2^{100} ; b) 2^{101} ; c) 2^5

Indicație : jumătatea nr. $2^{100} = 2^{100} : 2^1 = 2^{99}$

5. Arătați că $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} < 2^{101}$

Indicație: notam cu $x = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100}$, atunci

$$2x = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{100} + 2^{101}$$

$$2x - x = 2^{101} - 1 , \text{ deci } x = 2^{101} - 1 < 2^{101}$$

6. Arătați că : $2(1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{50}) < 3^{51}$

7. Arătați că : $(a - 1)(1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1}) < a^n - 1$

COMPARAREA PUTERILOR

1. Puteri cu aceeași bază

Oricare ar fi a , m , n numere naturale cu $a \neq 0$ și $a \neq 1$ avem :

Dacă $m \leq n$, atunci $a^m \leq a^n$

Ex. $2^5 \leq 2^{10}$; $3^{15} \geq 3^{10}$

2. Puteri cu același exponent

Oricare ar fi a , m , n numere naturale nenule, **avem :**

Dacă $a \leq b$, atunci $a^m \leq b^m$

Ex. $2^5 \leq 3^5$; $13^{15} \geq 11^{15}$

3. Puteri cu baze diferite și exponenți diferiți

Pentru a compara două puteri care au bazele și exponenții diferiți se aduc (dacă este posibil) fie la aceeași bază, fie la același exponent (cu ajutorul regulilor de calcul cu puteri) după care se compară cu ajutorul regulilor de mai sus.

Exerciții: 1. Comparați numerele :

a) 2^{53} și 4^{29}

Indicație $4^{29} = (2^2)^{29} = 2^{2 \cdot 29}$

b) 2^{30} și 3^{20}

Indicație $2^{30} = 2^{3 \cdot 10} = (2^3)^{10} = 8^{10}$
 $3^{20} = 3^{2 \cdot 10} = (3^2)^{10} = 9^{10}$

c) 5^{12} și 3^{11}

observăm că $5 > 3$, dar și $12 > 11$, deci $5^{12} > 3^{11}$

Aplicații : 1. Comparați puterile următoare :

a) 26^{54} și 26^{45}

b) 32^{79} și 23^{79}

c) 2^3 și 3^2

d) 2^{333} și 3^{222}

e) 2009^0 și 0^{2009}

f) 1^{2009} și 2009^1

g) 1^{2009} și 2010^0

2. Aflați numărul natural x în fiecare din situațiile următoare :

a) $2^x = 2^5$; c) $2^{x+1} = 2^{11}$

b) $2^x = 4$; d) $2^x < 2^9$